•	•	•		• • •			• •	•			•	•	•	•	• •	•				•	•	•	•	•	• •			•	•
•	•	0	CS 2810 Day 12 Feb 23	0 0 0 0 0 0	•	•	• •	0	0	0	0	0	0	0	• •	0	0	0	0	•	0	0 0	0	0	• •))))))	•	0	•
•	•	۰					• •	•	•		•	•	•	•	• •	•				•	•	•	•	•	• •	•		•	•
٠	•	۰	Day 1 of probability / st	atistics	•	•	• •	۰	۰	٠	۰	٠	٠	•	• •	۰	•	۰	٠	۰	٠	٠	•	•	• •	•	۰	۰	۰
•	٠	۰			•		• •	•		۰	۰	۰	•	•	• •	۰	۰	0	٠	۰	•	0	•	٠	• •	•	۰	0	•
٠	۰	٠	Why probability? Coin	tlip disc	CUS	sior) .	۰	٠	٠	۰	٠	٠	•	• •	۰	٠	۰	٠	۰	٠	۰	•	٠	• •	•	۰	۰	0
•	۰	0		0 0 0	0	٠	• •		۰		•	0		•	• •	0	0			0	0	0	•	•	• •	•			0
•	•	۰	Probability definitions	0 0 0		•	• •	۰	•		•	۰	•	•	• •	۰		•		۰	۰	•	•	۰	• •	•		•	۰
•	٠	٠	Uniform Distribution	• • •		٠	• •	٠	٠	٠	٠	٠	•	•	• •	۰	٠	۰	٠	٠	٠	•	٠	•	• •	•		٠	۰
•	۰	٠		• • •	0	٠	• •	۰	•		۰	٠	•	•	• •	۰	•	•	•	٠	٠	0	•	٠	• •	•		0	0
•	٠	٠	Joint Distribution	• • •		٠	• •	۰	۰		٠	٠	•	•	• •	۰			٠	۰	٠	•	•	٠	• •	•		۰	•
•	0	•	Independence	0 0 0	0		• •	•	•		•	•	•	•	• •	•		•	•	•	•	0	•	•	• •	•	0	0	0
•	•	•	Linearity of Expectation	ו	0		• •	•			•	•	•	•	• •	•	•		•	•	•	0	•	•	• •	•	0	0	
•	٠	٠					• •	•			•	•	•	•	• •	٠	•			٠		•	•	•	• •	•			•
	•	•	Expectation	• • •			• •				•	•	•	•	• •	•		•		•		•	•	•	• •	•		•	0
•	•	•	Linearity of expectation	ו			• •	•			•		•		• •	•				•				•	• •	•	0	0	
0	•	0	Variance	0 0 0				0			•		•	•	• •	0			0	0				0					0
•	•	٠	Die scaling vs rolling		•	•	• •	۰			•	•	•	•	• •	۰				•	•	•	•	•	• •	•		•	•
•	•	•	. Linear fnc of random v	ariables			• •	•			•	•	•	•	• •	٠			•	•	•	•	•	•	• •			•	0
																												•	

•	•	•	٠	•	٠	۰	•		•		۰	۰		٠	•	۰				۰	٠		٠		۰	۰	•		•	٠	•	•	• •			•	•	•	۰	•				۰
•	۰	•		•	٠	•	•		0	٠	•	•		۰	0	•	0		•	•	•	•	•	•	٠	•	•	•	•	•	•	•	• •			•	•	٠	0	٠		٠	•	0
•	۰	•		•		•	•		0		•	•			0				•	•		•	•	•	•		•	•	•	•	•	•	• •				•	٠	0	•		٠	•	
•	•	0	•	0	•	0	•	•	0		•	0			0	•			0	0	۰	0	•	•	•	•		•	•	•	•	•	• •			•	0	•	0	٠		•	•	۰
•	•	0	•	0	•	0	•	•	0	•	0	0	•		0	•		•	0	0	•	0	•	•	•	•		•	•	•	•	•	• •				0	•	0	٠	•	•	•	۰
•	۰	0		•	•	•	•	•	0		•	•			0	•	0		•	•	•	0	•		۰	•		•	•	•	•	•	• •			•	•	٠	0	٠		•	•	۰
•	۰	•		•	٠	•	W	/h\	/ P	го	ba	abi	lit	:v?	•	•			•	۰	•	•	•	٠	٠	•	•	•	•	•	•	•	• •			•	•	٠	0	٠		٠	•	٠
•	۰	•		۰		•				•		•			0				•	•		•	•		•			•	•	•	•	•	• •				•	•	0			٠	•	
	۰			•	0	•	(n	n [°] A	de	lir	הי	ċc	i'n	۴I	iń	ct		رم الان		•	0	•	۰	٠	•	0			۰	•	•	•	• •			•	•	0	•		٠	•	•	0
	۰	•		•	•	•	Ņ		ů		ġ				Ϋ́	30	.	y)	•	•	۰	•	•		•	•		•	•	•	•	•	• •			•	•	٠	•	۰		•	•	٠
																													•															
																				÷					Ŭ.																			
•	•	0	•	•	۰	•				L : I		•	, II	0	•	•	•	L.					-1-	L			•		•		•					- L	•	٠	٠	•	•	۰	۰	۰
0	0	•	•	•	•	•	Pi	rol	ba	bil	lity	y a	llo	W	S.U	JS	to	bu	iilo	d a	"Ŀ	ola	ck	bo)X"	' m		lel	of	F. C	om	pl	ex	ev	e	nt	S	•	•	•	•	•	•	•
0	0	0	0	0	0	0	Pi ar	rol nd	ba re	bil	lity or	y.a na	llc bo	wo	s.u tl	us he	to fu	bu	iilo ге	d a by	"Ŀ / 0	ola bs	ck er	bo vir	ox" ng	' m pa	IOC St	lel ou	of	f.co	om s		ex	ev	e	nt	S	•	•	0	•	•	•	0
0 0 0	0 0 0	0 0 0	0	0	0	0	Pi ar	rol nd	bа ге	bil as	lity	y a n a	llc bo	ow out	's.u : tl	JS he	to fu	bu Itu	iild ге	d a by	"t / 0	ola bs	ck er	bo vir	ox" ng	' m pa	ioc st	lel ou	of	f co out	om S	pl	ex	ev	er ,	nt	° S	0	0 0 0	0	0 0 0	•	0 0 0	0 0 0
0 0 0	0 0 0	0 0 0	•	•	0	0	Pi ar	rol nd	ba re	bil as	lity	y a n a	llc bo	ow out	's.u : t	us he	to fu	bu itu	iild ге	d a by	"t / 0	ola bs	ck er	bo vir	ox" Ig	' m pa	iod st	lel ou	of	f co out	om s		ex	ev	er ,	nt	°	•	0 0 0	0 0 0	•	0 0 0	0 0 0	0 0 0
•	•	0 0 0 0	•	•	0 0 0	0 0 0 0	Pi ar	rol nd	ba re	bil as	lity or	y a 1 a	bo	ow out	's.u : t	JS he	to fu	bu itu	iilo re	d a by	"t / 0	bs	ck er	bo vir	ox" Ig	'm pa	ioc st	jel ou	of	fico	om s	ipl	ex	ev	er ,	nt	• • •	•	•	•	•	•	0 0 0	0 0 0 0
•	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	0 0 0 0	0 0 0 0	•	0 0 0 0	0 0 0 0	Pi ar	rol nd	ba re	bil	lity or	y a 1 a	bo	ow out	's.u : t	JS he	to fu	bu itu	re	d a by	"E / 0	bs	ck er	bo vir	ox" ig	'm	st	jel ou	of	f.co out	om s	pl	ex	ev	er	nt:	• • •	•	0 0 0 0	0 0 0 0	•	•	0 0 0 0	0 0 0 0
• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0	• • • • •	• • • • •	• • • • • • • • •	0 0 0 0 0	Pi ar	rol nd	ba re	bil	lity	y a n a	bo	ow out	'S.U : t	JS he	to fu		re	d a by	"Ľ / O	bs	ck er	bo vir	ox" ig	'm	st	jel ou	of	f co out	S		ex.	ev		nt:	• • •	• • • •	• • • •	0 0 0 0	•	• • • • • • • • •	• • • • • • • •	0 0 0 0
•	•	• • • • •	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •		• • • •	· · · ·	Pi ar	rol nd	ba re	bil	lit <u>y</u> or	y a n a	bo	ow out	rs (: tl	us he	to fu	bu itu	iild re	d a	"E / 0	bs	ck er	bo)x" ig	'm pa	st	Jel ou	of	fout	om S	pl		ev	ve (S	•	• • • • • •	· · ·	•	•	•	• • • • •
•		• • • • •	• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	• • • • • •	• • • • • •			rol nd	ba re	bil	lit <u>y</u>	y a n a	bo	ow out	rs.u : ti	JS he	to fu	bu	ıild re	d a by	"E / 0	bla	ck er	bo vir	»x" ìg	'm	ioc st	jel ou	of	f co out	om S	pl		ev	ver	nt	• 5 • • • • •	• • • • • •	• • • • • •	• • • • • • • • •	• • • • •	• • • • • •	• • • • •	0 0 0 0 0

Probability Langu	age EXAMPLE: COIN FLIF	••••••••••••••••••••••••••••••••••••••
Experiment	Event with uncertain outcome	COIN FLIP
Outcome	The result of an experiment	HEADS
Sample Space	Set of all possible outcomes	E HEADS, TAILS }
Event	subset of sample space	5 HEADS 3
Random Variable	Function of the outcome(s) of some experiments	GIVEN D CON FLIPS T X=1 IF BOTH MEADS ELSE X=0

Probability Langu	age Example	Die Doc
Experiment	Event with uncertain outcome	ROLLING 6 SIDED DIE
Outcome	The result of an experiment	3
Sample Space	Set of all possible outcomes	51,2,3,4,5,63
Event	subset of sample space	AN 000 OUTCOME \$1,3,5}
Random Variable	Function of the outcome(s) of some experiments	GIVEN 1 DIE ROLL LET X= 10.00TCOMÉ

Probability Langu	age Example	WEATHER	• • • •
Experiment	Event with uncertain outcome	WEATHER TODAY	• •
Outcome	The result of an experiment	RAINY	• •
Sample Space	Set of all possible outcomes	SUNNY RAINY SNONY	• •
Event	subset of sample space	PRECIPITATES = & PAINY SNOW	ri
Random Variable	Function of the outcome(s) of some experiments	GIVEN I DAY'S WEATHER G= I IF RAINY OR SNOW O OTHERNISE	· ·

Probability Langua	age	•		<i>ر د</i>	ot A	t Tic	5	2	• •	0	•	0	• •	0	• •	
Experiment	Event with uncertain outcome	•	•••	•••	0	• •	•	•	•••	0	•	•	•••	•	••••	
Outcome	The result of an experiment			_0¢	NE	RC		56			.5	۲٦	٢٢		. 7	K
Sample Space	Set of all possible outcomes	•	0 0 0 0	• •	0	• •	0	0	0 0 0 0	0	0	0	• •	•	• •	0 0
Event	subset of sample space	•	• • • •	• •	0	• •	0	•	• •	0	•	•	• • • •	•	• •	
Random Variable	Function of the outcome(s) of some experiments	•		C	A~	.	ر ې				بې	۔ در	Ē			5

	Dano	on Ja	XR	• • • • •	• • • •	• • • •	• • • • •
		UTCON	re				
C	1 1 1 1						• • • • •
	(X = X)				0 0 0 0	0 0 0 0	
		0 0 0 0 0 0 0 0 0 0			0 0 0 0	0 0 0 0	• • • • •
		• • • • •			0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0	
	PROB				0 0 0 0	• • • •	
	• • • • • • • • • • •				• • • •	0 0 0 0 0 0 0 0	• • • • •
· · · · · · · · · ·		• • • • •			° ° ° °	• • • •	• • • • •
· · · · · · · · ·					0 0 0 0	0 0 0 0	• • • • •
· · · · · · · · · ·					• • • •	• • • •	• • • • •

	• •	• •	• •	• •	• •
	• •	• •	• •	• •	• •
	• •	0 0	0 0	0 0	0 0
Let X be a random variable indicating a student's numeric grade on a quiz.	• •	• •	• •	• •	• •
	• •	• •	• •	• •	• •
1. Define the sample space of the experiment	0 0	0 0	0 0	0 0	0 0
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• •	• •	• •	• •	• •
$\left(\frac{1}{2} \right) = \left(\frac{1}{2} \right$	• •	• •	0 0 0 0	• •	0 0 0 0
2. Define the event of a student passing the quiz	0 0 0 0	• •	• •	• •	o o
[60, 100]	• •	• •	• •	• •	• •
	• •	0 0	• •	0 0	0 0
	• •	• •	• •	• •	• •
	• •	• •	• •	• •	• •

	۰	۰	•		•	۰	۰	٠	٠	۰	۰	۰			۰	۰	•	٠	۰	۰	۰	۰	٠	۰	۰	۰	•		۰	۰	۰	•	•	۰	۰	•	۰	۰	۰	۰	•		۰	•
٠	•	0	0		۰	۰	•	٠	٠	٠	۰	۰	٠	٠	۰	٠	۰	٠	۰	۰	0	•	٠	٠	٠	•	0	0	•	۰	۰	0	0	٠	۰	۰	۰	٠	٠	٠	•	•	٠	۰
٠	٠	۰	٠	۰	۰	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	۰	٠	٠	٠	٠	٠	۰	۰	٠	٠	٠	٠	۰	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	•	•	۰	٠
	۰	•		т		4~	•	.:			•			•	•	~ F	•		~Fi	Fa				ho	Fo		•		۰	•	٠			•		٠	0	0	0	0	0	0	۰	۰
۰	0	0	0	- 1	0.0	16:	5CI	שו עו	e (d. :_	dii		2111	e,	/ei	ιι,	w	e	21	le	n. (126	: LI	ne	ι		•	0	0	0	۰	0	0	•	۰	۰		۰	0	0	•		۰	•
۰	۰	۰	۰	۰	rai	na	оп	1.V	аг	Ial	DIE		٠	٠	۰	۰	۰	٠	۰	۰	0	•	٠		٠	۰	۰	۰	۰	٠	۰	۰	•	٠	۰	۰	0	٠	٠	٠	0	0	۰	۰
٠	٠	۰	۰	۰	۰	٠	۰	٠	•	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	•	•	٠	٠	•	•	٠	٠	٠	٠	۰	۰	۰	٠	•	۰	۰	٠	٠	•	٠	٠	٠	٠	•	0	٠	۰
٠	۰	•	•		•		•		•	۰	۰	•	•	٠		•	•	•	•	•	•	•	٠	•	۰	۰	•	_	•		••••	•	•	٠	۰	•	•	٠	۰	•	۰	۰	٠	•
•	•	•	•	Ľ	.et	X	be	t	ne	га	nc	101	n١	/ar	'Ia	bl€	9°V	vh		<u>ו</u> ו	st	he	Ol	uto		ne	a	ra	ור (6°S		ed	dı	e			•	•	•	•	•	•	•	•
																								ļ				ļ			ļ													
	•	•		Ļ	.et	Ŷ	be	ŧţ	ne	Гa	N C	lòt	'n،	/ar	ia	ble	e v	vhi	ict	n is	st	he	%	in,	٦Ç	ea	se	in	sl ا	ţŌ	cķ	ma	ark	٩	t t	od	lay	' .	•				•	•
	•	•				•				•	•				•	•			•	•									•	•					•						•	•	•	•
0				Ľ	.et	ΖI	be	ţŀ	ŅĢ	٢a	ŊĊ	lor	n \	/ar	ia	ble	9 .V	/hi	¢ŀ	ı is	5 P	٢O	fŀ	lig	jge	er'	s f	av	QΓ	it€	e ir	ηţe	ege	eŗ.				0			0	0	•	
	•	•	0		•	(. n	ot	U	n.c	ег	ta	in	to	hi	m,	b	ut	yc	DU	ca	Π. Γ	no	bde	li	t a	IS S	SUC	:h	to											•		۰	•
•	•	•		•	٠	er	nCa	aps	sul	lat	e	an	d r	na	na	ge	U	nc	ег	ta	inl	ty)	٠	•	٠	•	•	•	•	•	•	٠	•	•	•	•	•	٠	٠		•	•	٠	•
٠	•	0	0	•	۰	۰	۰	٠	٠	۰	•	•		٠	۰	۰			٠	۰	0		٠	٠	0	۰	0	0	•	0	٠	0	0	0	•		۰	٠	0		•	•	۰	0
٠	۰	۰	۰	۰	۰	۰	۰	٠	٠	۰	۰	۰	٠	٠	۰	۰	٠	٠	۰	۰	0		٠	٠	٠	۰	۰		۰	٠	٠	۰		٠	۰	٠		٠	٠	٠			٠	۰
	۰	۰	0		•	۰	٠	۰	۰	۰	۰	٠			۰	0	٠	٠	۰	۰	۰		٠	۰	•	٠			۰	•	٠			•	۰		۰	0		0	•	•	۰	۰
٠	0	0	0	0	•	۰	•	٠	•	۰	۰	۰		۰	•	۰	•	٠	۰	۰	0	•	٠	•	۰	•	0	0	0	0	•	0	0	0	۰			٠	۰		0	0	۰	0
٠	٠	۰	٠	۰	۰	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	۰	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	•	٠	٠	٠	٠	•	•	۰	٠

	Probability Language LET W BE RANDOM VARIABLE
•	DESCRIBING WEATHER TODAY
•	Probability How likely a particular outcome is $P(W = W_0) = 40^{\circ}/_{0}$
•	PROB WENTHER TODAY
•	15 CLOUDY 15 40%
•	
•	Distribution A function which assigns a probability to each outcome in sample space
•	P(CLOUDY)= 40% P(RAWY)=20% P(SUN)=40%



UN,For	LM DISTRIBUTION ASSIGNS EQUAL PROB
· · · · · · · · · ·	TO ALL OUTCOMES IN SAMPLE SPACE
$F_{A,R}$ Com (A) $(F)So(0)$ $So(1)$	5 Far Dié 16 16 16 16 16 16 16
FOR MIEOR M!	$P(x) = \frac{1}{5} = \frac{5}{15} = 5$

Computing P	POB FROM UNIFORM	DISTRIBUTION
Given a Fo	are Die Compute	Prob of Each Event
X= Row A 1	Y= ROLL AN ENEN #	Z= Roll A ARIME#
· · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
· · · · · · · · · · · ·		



EXPECTED VALUE	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
EXPECTED VALU	E REPRESENTS AN AVERAGE OUTCOME
OF 6	7 RANPOM VARIABLE
Oosere 5	= 50,03 50,65 =
$P(w) \int w$	A MALF TIME 'WIN' \$0 A MALF TIME 'WIN' \$0 ELEMENTS IN SAMPLE
112 32	$41 = 3 \cdot 1/3 + 0 \cdot 1/3$
P(w) W 1/2 \$2 1/2 \$0	The init to the i

· · · ·	OF RANDOM VARIABLE X	X = 20103	• • • • • • • •
· · ·	E[x] = 0, p(x=0)+ 1, p(x=1)+2.	P(x=)	• • • • • •
· · ·	EL+J = E X.P(x) XES Z.P(x)	OB OF OUTCOME OF RANDOM VARIABLE	• • • • • •
· · · ·	ALL OUTCOMES SAMPLE SPACE	in E	• •

 $\mathcal{E}\left[O_{X}\right] = \sum_{X} IO_{X}P(X=x)$ SOM OVER OUTCOMES



		۰	•	•	۰	۰	۰			•	۰		•	•	•	۰		•	•	۰	۰			*	۰	۰			۰	۰	•	•	•	۰	•				•	•	•	۰	۰	۰
٠	*	•	•	٠	٠	٠	•		٠	٠		٠	•	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠		*	٠	٠	٠	•	٠	٠	•	•	•	٠	•	٠	٠	٠	٠		٠	٠	٠	٠
•	٠	۰	•	•	۰	•	۰			•	۰		•	•	•	۰			•	۰	•				۰	٠		•	•	۰	0	•	•	٠	٠		0	•	•		0	۰	٠	0
٠	۰	٠		•	۰	•	۰			•	۰		•		•	۰			•	•	•			٠	۰	•	•			0	•	•	•	•	•		•	•	•		۰	۰	۰	
	•	۰		•	•	•						•	•	•	•	-				•	•					•	•		0	•	•	•	•	•	•	•	•		0	•	•	•	۰	0
۰	۰	0	•	۰	۰	0	۰	۰	•	Ć		22	>C)	0	ł	•	Ŋ	\ e	6	N	2	}	۰	Q	A -	10	5	T	۰	•	•	•	•	•	۰	0	۰	۰	۰	•	0	0	0
۰	•	۰	•	•	۰	۰	۰	•	۰	•	۰			•	۰		۰	•		۰	۰	۰	•	٠	۰	٠	•	•	۰	٠	•	•	۰	۰	•	•	•	۰	۰	۰	0	۰	۰	۰
	۰	•	•	•	•	•				•	0					-	0	0	0	0	0			•	•	•	•	٠	•	•	0	•	•	•	•	۰	0		0		0	۰	۰	۰
		•	•	•	۰	•				•	0	1			•	•	4	٦.	Ď	0	Ô				0		•		•	0	•	•	•	•	•		•		0		0	۰	۰	۰
	•	•	۰	•	•	•	۰	•	•	•	•		ļà	•	•	•	4						•	•	•	•		•	0	•	•	•	•	•	•	•		•	•	•	0	•	۰	0
٠		•	•	٠	٠	۰	•		٠	٠		*	•	•	۰		•		٠	٠	٠	٠		*	٠	٠	٠		٠	٠	•	٠	•	٠	•	٠	۰		۰		•	٠	٠	٠
•	•	۰	•	•	۰	•	۰			۰	۰	-\	ŀ,		•	•	•	₳	• 1		•			٠	۰	٠		•	۰	٠	•	•	•	٠	٠	•		۰	•	۰	0	۰	٠	0
				•	•	•				•			<)	•			Ŷ			•				•		•		•	0	•	•	•	•	•				0			٠	•	0
•	•	0	•	•	•	0	•	•		0	•	0	0	•	0	•	ł		0	0	0		•	•	•	•	0	•	0	•	0	0	0	•	•	•	0	•	0		0	•	۰	0
		•			•	•				•		•	•		•	•	1		•	•	•				۰		•		•	۰	•	•	•	٠	•		•		•	•	•		٠	0
		•	•	•	•	•	•			•			•		•	•			•	•	•				•	•			•	•	•	•	•	•	•		•		•		•	•	٠	•
	•				•	•	•			•					•	•			•	•	•				٠	•			•	٠	•		•	•	•			•	•			•	•	0
	•	0	•		•	0	•			0			0		0	•			0	0	0				•	•	0		0	•	0	0	0	•			0		0		0	•	•	
			-		•																				•	•				0			•	•	•								•	
		•		•	•	•	•						•		•	•				•	•				•	•			•		•	•	•	•	•				•		•	•	•	•
		•			•	•				•					•	•				•	•				•	•			•	•			•	•					•				•	•
						•														•					•					•				•					•				•	
•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	•	•	•	•	•	•	•	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	•	•	•

•	0	0	•	• •	•	•	0	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0
0	0	•	•	• •	0		N	. 0 '	י ס־	۲	•	د	عر)))	> (5	E		57	•	0	0	•		∫ .‡	ĮV,	2 E)))	•		•	0 0 0	•	0	0	•	0	0	0	•	0
0 0 0	•	•	•	• •	•	•	•	•	•		P.	گ	۰ ۰	fd	Sl	تر		• • •	0	٠ ٦	۲,	م. مرد		•	•	Ð	<u>د</u>	τ	Ċ	90	N	E	Ś	>	•	•	•	•	•	•	•	•	•
0	•	•	•	• •	0	0	•	•	•	•	•		5!	ç	7	E).	•	•	٢	بر	٩	Ś	E	•	•	57	2	•	E		¢		٢	re	7	2	•	•	•	•	0
0	0	•	•	• •	•	•	•	•	•	0	•	•	•	•	•	•	•	•	Ĵ	Ą	L-۱	<u>ج</u> د	-	•	•	•	•	•	0	•	•	•	•	0	•	•	•	•	•	•	•	•	0
•	0	0	•	• •	•	•	0	•	•	0	•	•	•	0	0	•	0	0	0	0	•	0	•	0	0	•	•	•	0	•	•	•	•	0	0	0	0	•	0	0	0	•	•
•	•	•	•	•••	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	0	•	•	•	•	•	•	•
		•								•		•	•	•															•														

HOW CLOSE, ON ANORAGE, >> DOUBLE LOTTO TO ITS EXPELTED VALUE? P(0) 0 0-ELDJ (0-ELDJ) $\sum_{i=1}^{n} E(0 - E(0))^{i}$ = $1 \cdot ||_{0} + 1 \cdot |_{0} = 1$ E[0]=10.0+10.0=1

How close, on Average, .> Moon L	LOTTO TO ITS EXPERTED
P(0) 0 0 D-E(0] (0	-E(D)
1/1000 1000 9999	Gqqª
6[0]=1	LOEL(O-ELOJ)
ECJ	$= 999^{\circ} \cdot \frac{1}{1000} + 1^{\circ} \frac{1}{999}$

VARIANCE (AND	STANDARD	DEVIRTION		• • • •	• •	0 0 0 0
VARIANCE (AND OUTCOMES TYPICALLY	STO DEN) ARE TO	DESCRIBE Expected	H V Q L JE	د مهرج ع	••••	• •
VAR(x) = E[((X-E[x])			· · · · ·	· · ·	• • • • • • • •
5 TO DEN (*) =	TVAQ(x)			· · · · ·	· ·	• •
· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				• • • •	• •	• •

NOTATION VOCAD	*NJ" E[*]
WES OFTEN USE	P TO REPRESENT EXPECTED VALJE
	5 TO REPRESENT VARIANCE E[(X-µ)]
"Gionin	O TO REPRESENT STO DEN

Compute the expected value, variance and standard deviation of D where D is a random variable representing a fair (uniform) 6 sided die roll. (You may find a calculator helpful) (+) How does the expected value / variance of D compare to another die which. has 1000 sides? Justify your response algebraically or with a thoughtful appeal to one's intuition. $E[D] = \leq d P(D = d) = 1 \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{3}{6} + \frac{3}{6} + \frac{3}{6}$



LINEARITY OF EXPECTATION	
LET XIN BE TWO RANDO AND XIB BE TWO SCALAR	M VARIABLES WITH JOINT P(XY)
$E[\alpha X + \beta Y] = \alpha$	$E[x]+\beta E[y]$
SCALE ADD RANDOWN VARS	SCALE/ADD RANDOM
BEFORE EXPECTATION	VARIABLES AFTER
OPERATOR	Expectation OPERATOR

LINEA	nary of	EXPECTATION	(PROOF)	
LET	X.Y BE	TWO RAND	M VARIABLES	wry Joint P(xy)
AND	a, b be	TWO SCALAR		
Elo	x X+ BYJ	- 2($\alpha \times + (\beta Y) P($	X = x Y = 1
	· · · · · · · · · · ·	$\leq \sqrt{0}$	(=~ Y=v) + ($3 \leq \sqrt{l(x=x+y)}$
l on			6 MARGINAIZE	XY Marco
COVER	JEATION = O	× × PL	$\chi = \star $	$5 \leq P(1=1)$
MARCENT, N NEXT	- (a	XE[X]	S+BE[1]	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·

ANOTHER WAY	OF EXPRESSING	COMPUTING	JANIANCE	
Or = VAR	(x) = E [(x - E)]	[x]»7 4	- OLD WA	51
· ·	= E [x [°] -	2×E[×]+E		
ADRLY OF LINEARITY OF	$= \mathcal{E}[x^{a}]$	-JE[x]E	[x] + E[x]	
Expertant	= E[x]	J-9E[x]	+ E[x]	s Way
	= C [*.	J-ELXJ		· · · · · · · ·

ATING	New 1	JARIANCE	Formula c	on Double (٥٣٣٥
	0-E[0]	(0-E[O [[o	9	• • • •
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · ·		0.1/2.12	1.19=7
9 9	· · · · · · · · ·		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · ·	· · · · ·
	••••••	YAR(O)	× · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·		Г. 1 ^{.3}
5.12+		E[(D-E[D]		o) = E[0']-C	
		: 2 + •		= 2 -	t .
	ат.NG	ATING NEW 1 0 0 - E[0] 0 -1 3 1 3 1 3 -1 3 -1	ATING NEW VARIANCE $0 \mid 0 - E[0] \mid (0 - E[1]) = 0 \mid 0 - 1 \mid 0 \mid 0 = 0 \mid 0 - 1 \mid 0 \mid$	ATING NEW VARIANCE FORMULA $ \begin{array}{c c} 0 & 0 - E[0] & (0 - E[0]) \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 0 \\ \hline$	ATING NEW VARIANCE FORMULA ON DOUBLE $ \begin{array}{c ccccccccccccccccccccccccccccccccccc$

GOAL USE LINEARITY OF EX VALUE/ VARIANCE OF AD	DITION MULTIPLILATION OF
DANDOM NARIABLE X AN	IO CONSTANT C
E[X+c] = E[x]+c	JAR(X+C) = JAR(X)
E[CX] = CE[X]	$VAR(CX) = C^{2}VAR(X)$

 $VAQ(cx) = E[(cx)^{3}] + E[cx]^{3}$ = c² E [x²] + C² E [x] $= c^{\ast} \left(E \left[x^{\ast} \right] + E \left[x^{\ast} \right] \right)$ $= C^{3} VAR(x)$

•	•	•	• •	۰	• •	•	• •	۰	• •		•	• •		•	0	٠	٠	•	• •		0	0	0	• •		۰	•	•	• •		_	•	•	• •	1
• •	•	•	• •	0	• •	0	• •	۰	• •	• •	۰	• •	•	۰	0	•	•	•	• •			۰	•	• •	0	۰	0	•			0	•	•	• •	
• •		•	• •	0	• •	0	• •	۰	• •	•	•	• •	•	۰	0	•	•	•	• •			۰	•	• •	0	۰	/		• •	0	•		•	• •	1
		•	• •	0	• •	0	• •	•	• •		0	• •	0	0	0	•	•	•	• •		0	0	•	• •				•	• •	0	۰		•	• •	,
0 0		•	• •	۰	• •		• •	۰	• •		0	• •		•		•	•		• •			•	•	/		۰		•	• •	0	۰		•	• •	,
• •		•	• •	۰	• •	0	• •	•	• •	•	0	• •	•	•	0	•	•	•	• •	•		•		• •	0	۰	0	•	• •	0	•	•	•	• •	
•	•	•	• •	٠	• •	۰	• •	•	• •	•	۰		•	۰	•	•	•	•	• •	۰	/		٠	• •	٠	٠	۰	•	• •	۰	٠	٠	•	• •	1
• •	•		• •	٠	· • ·	•	• •	•	• •	1	-1	• •	•	۰	۰	•	•	•	• •			۰	٠	• •	۰	٠	۰	•	• •	۰	٠	٠	•	• •	,
0 0		(• • •	0	• •	0	• •	•	• •	-			· ·	0	0	•	•	•	/		0	0	0	• •	0	۰	0	•	• •	0	۰	0	•	• •	,
• •	. •	\vdash		0	• •	0	• •	٠	• •		•	• •		۰	۰	•			• •	۰		•	•	• •	•	۰	۰	•	• •	۰	۰	۰	•	• •	-
• •	•	-	•••	0	• •	0	• •	•	• •	• •	٠	• •	•	۰	•	/		•	• •	•	۰	۰	•	• •	0	٠	•	•	• •	•	۰	•	•	• •	2
• •	•	•	• •	۰	• •	•		. (. —	1	۰	• •	۰			*	٠	•	• •	•	•	•	0	• •	•	۰	-	•	• •	0	۰	•	•	• •	
• •		•	• •	۰	• •		Ċ	バ	4	\	0	• •	/		0	0	0		• •		-			1	G	۰		•	• •	0	۰	•	•	0 0	
		•	• •	۰	• •			0	•		0	/		()			0	•	0 0	0	-			• •	•	0	•	0		0	•		•	• •	
• •	•	•	• •	0	• •	0	• •	•	• •		/		•	\vdash				•	• •		•	•	•	•	0	•		•	• •	0	•		•	• •	
• •	•	•	• •	٠	• •	۰	• •	٠	• •	/		• •	۰	•	•	•	٠	•	• •	•	•	•	۰	• •	۰	٠	۰	•	• •	۰	۰	•	•	• •	
• •	•	•	• •	۰	• •	•	• •	•	/		۰	• •	۰	۰	۰	•	•	•	• •		_	٢.	•	ו ו		•	۰	•	• •	۰	۰	•	•	• •	
• •			• •	0	• •	0	• •	/		•	0	• •	0	0	0	•	•	•	• •		0	Ľ	+	ר/י			0	•	• •	0	•		•	• •	
• •			• •	•	• •		/		• •			• •	•	0	0	•	•	-	• •				•		0	۰	0	•	• •	0	•		•	• •	
• •	•	•	• •	۰	• •		• •	٠	• •	•	•	• •	•	•		•	•	•	• •	•		•	•	• •	•	۰	•	•	• •	•	•	•	•		
• •	•	•	• •	٠	• •	۰	• •	٠	• •	•	٠	• •	۰	۰	•	•	•	•	• •	۰	۰	۰	•	• •	۰	٠	۰	•	• •	۰	٠	۰	•		
			• •		• •		• •			•		• •							• •					• •					• •						2

 $\mathcal{E}[x+c] = \mathcal{E}[x] + \mathcal{E}[c]$ JAR(x+c) = E[x] + C $= E\left[\left(x+c\right)^{3}\right] - E\left[x+c\right]^{3}$ $= E\left[x^{2} + \partial cE[x] + c^{2}\right] - \left(E[x] + c^{2}\right)$ E[cx]= = E[x] + 2 C E[x] + C $-E[x]^{2}-\partial cE[x]-c^{2}$ $= E[x^{3}] - E[x]^{3} = VAR(x)$

G	VALOE/V	ARIANCE OF ADDIT	TATION TO FIND EXPELTED
• • •	RANDOM	VARIABLE X AND	RANDOM VARIADLE Y
• •		· · · · · · · · · · · · · · · · · ·	
· · ·	=] x + 1	7 = E[x] + E[x]	$\sqrt{AR}(x+\gamma) = 7$
• • •			NEXT LESSON
• •		· · · · · · · · · · · · · · · · ·	NEED NOTION OF
• •		· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	INDEPENDENCE)
• •	· · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·